Über die Integralinvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören.

Von O. VARGA in Prag.*)

In der komplexen projektiven Ebene ist eine Gerade eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, entsprechend soll daher unter einer Kurve[1]) eine Mannigfaltigkeit verstanden werden, die in der Form $x_i = x_i(u_1, u_2)$ $(i = 1, 2, 3)$ darstellbar ist; dabei ist das Verhältnis der drei stetig differenzierbaren Funktionen $x_1(u_1, u_2)$, $x_2(u_1, u_2)$, $x_3(u_1, u_2)$ eine komplexe Größe und u_1, u_2 sind reelle Parameter. Beim Übergang zu einer Hermiteschen Geometrie wird als Maßbestimmung ein quadratisches Bogenelement eingeführt[2]). Deuten wir die Hermitesche Ebene reell, dann entspricht ihr ein vierdimensionaler Riemannscher Raum R_4, in dem man, von dem quadratischen Bogenelement ausgehend, Differentialausdrücke erster bis vierter Ordnung bilden kann. Unsere Kurve geht bei dieser Deutung in ein Flächenstück des R_4 über, für das der Differentialausdruck zweiter Ordnung $d\omega_2$ das Flächenelement ist[3]).

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine Deutung von $\int d\omega_2$ (erstreckt längs unsrer Kurve) in der Hermiteschen Ebene selbst gegeben werden, die die reelle Deutung im R_4 nicht benützt. Dabei werden wir allerdings über die Klasse der zulässigen Kurven einschränkende Voraussetzungen machen müssen[4]). Es zeigt sich dann[4]), daß das in Frage stehende Integral bis auf den Fak-

*) Vorgetragen an der 14ten Deutschen Physiker- und Mathematikertagung in Baden-Baden, am 13. September 1938.

1) Siehe § 3.

2) Siehe § 1, Formel (7).

3) Siehe § 3.

4) Siehe § 3 und § 4.

tor $1/2\pi$ gleich dem Maß der Menge aller Treffgeraden der Kurve ist, wenn jede Gerade in derjenigen Vielfachheit gezählt wird, in der sie die Kurve trifft.

Wir beschränken uns hier auf die elliptisch-Hermitesche Geometrie[2]), obwohl unser Ergebnis auch im hyperbolischen und parabolischen Falle Gültigkeit hat.

Im § 1 stellen wir einige Ergebnisse der elliptisch-Hermiteschen Geometrie zusammen, die im folgenden benützt werden[5]). Im § 2 werden Maße für Punkt- und Geradenmengen eingeführt, und zwar in analoger Weise wie dies von Herrn W. BLASCHKE für lineare Untermannigfaltigkeiten Euklidischer und Nichteuklidischer Räume geschehen ist[6]). In § 3 wird eine neue Form für das zu einer Kurve gehörige Bogenelement hergeleitet. Diese Form des Bogenelementes wird dann zur Ableitung eines einfachen Ausdrucks für die Differentialinvariante $d\omega_2$ benützt. Schließlich stellen wir noch einen Zusammenhang zwischen $d\omega_2$ und einer in § 2 gewonnenen Differentialinvarianten her. Im § 4 beschäftigen wir uns mit dem Geradenmaß einer Kurve und werden so zu dem oben erwähnten Hauptergebnis dieser Arbeit geführt.

§ 1.

Zusammenstellung einiger Ergebnisse der elliptischen Hermiteschen Geometrie[7]).

Zu Grunde gelegt sei die komplexe projektive Ebene, in der ein Punkt $\mathfrak{x}$ durch das nichtreelle Verhältnis eines Tripels (x_1, x_2, x_3) von komplexen Zahlen bestimmt ist. Zur elliptisch-Hermiteschen Geometrie (wir werden die Abkürzung e. H. Geometrie verwenden) kommen wir, in dem wir eine reelle Punktmenge auszeichnen, die durch Nullsetzen einer definiten Hermiteschen Form entsteht, die in der kanonischen Gestalt vorgegeben sei, also

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = 0 \tag{1}$$

oder mit einer Abkürzung, die im folgenden immer verwendet

[5]) Siehe darüber E. STUDY, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet, *Math. Annalen*, 60 (1905), S. 321—377.

[6]) W. BLASCHKE, *Integralgeometrie* 1: *Ermittlung der Dichte für lineare Unterräume im E_n* (Actualités scientifiques et industrielles, Paris, 1935).

[7]) Siehe dazu außer der unter [5]) zitierten Arbeit noch E. CARTAN, *Leçons sur la géometrie projective complexe* (Paris, 1931), insbes. Kapitel 5.

wird,

(1') $$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})=0.$$

Die Kollineationen, die das durch (1) definierte absolute Gebilde in sich überführen, heißen die Bewegungen der e. H. Geometrie. Es sind die sogenannten unitären Transformationen, deren Matrizes $\mathfrak{A}=(a_{ik})$ dadurch charakterisiert sind, daß

(2) $$a_{ik}\bar{a}_{lk}=\delta_{il}$$

ist, wo δ_{il} das Kroneckersche Symbol ist.

Im folgenden sollen fast ausschließlich Normalkoordinaten verwendet werden. Sind z_1, z_2, z_3 die Koordinaten eines Punktes, dann sind seine Normalkoordinaten bestimmt durch

(3) $$x_i=\frac{z_i}{z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_3}\quad (i=1, 2, 3).$$

Es gilt also für die Normalkoordinaten x_1, x_2, x_3 von $\mathfrak{x}$

(4) $$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})=1.$$

Die Normalkoordinaten sind bestimmt bis auf einen Zahlenfaktor der Gestalt $e^{i\alpha}$ (α reell!).

Der metrische Grundbegriff der kürzesten Entfernung d zweier Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ wird festgelegt durch

(5) $$\cos\frac{d}{2}=|(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}})|.$$

Wir können hier auf die Überlegungen geometrischer Natur, die zu diesem Entfernungsbegriff führen, nicht eingehen, bemerkt sei bloß, daß es sich, gestützt auf das absolute Gebilde (1), um eine Cayleysche Metrik handelt. Zwei Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, die bezüglich (1) konjugiert sind — wir wollen sie auch als elliptisch-Hermitesch orthogonal bezeichnen und die Abkürzung e. H. orthogonal verwenden —, haben einen Abstand π voneinander, denn für sie gilt ja

(6) $$|(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}})|=0.$$

Aus (5) folgt für das Linienelement der Ausdruck

(7) $$ds^2=4\,((d\mathfrak{x}\,.\,\overline{d\mathfrak{x}})-(\mathfrak{x}\,\overline{d\mathfrak{x}})\,(\bar{\mathfrak{x}}\,d\mathfrak{x})).$$

Die Verhältniskoordinaten $\mathfrak{u}(u_1, u_2, u_3)$ einer Geraden, die durch einen Punkt $\mathfrak{x}(x_1, x_2, x_3)$ hindurchgeht, sind die Koeffizienten einer Linearform in x_1, x_2, x_3; wir denken sie ebenfalls normiert, so daß

$$(\mathfrak{u}\,\overline{\mathfrak{u}}) = 1 \tag{8}$$

gilt. Wie in der gewöhnlichen elliptischen Geometrie, herrscht auch hier volle Dualität. Der Winkel φ zweier Geraden $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wird also bestimmt durch

$$\cos\frac{\varphi}{2} = |(\mathfrak{u}\,\overline{\mathfrak{v}})| \tag{9}$$

und ist gleich dem Abstand der Pole (bezüglich (1)) von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.

Wir machen noch auf einen Unterschied gegenüber der gewöhnlichen elliptischen Geometrie aufmerksam, der aus der Festsetzung (5) der Metrik hervorgeht. Wegen (6) schließen zwei konjugierte Geraden einen Winkel von der Größe π ein. Der gestreckte Winkel (es ist derjenige Winkel, der von einem Strahl überstrichen wird, der sich so lang dreht, bis er das erste Mal mit seiner Trägergerade zusammenfällt) hat also als Maßzahl 2π.

Wir wollen noch eine Abbildung der Geraden unsrer Geometrie auf die Einheitskugel besprechen, dieselbe wird für unsere Zwecke besonders wichtig sein[8]).

Die Punkte der komplexen projektiven Geraden sind durch die Verhältniskoordinaten $x \equiv (x_1, x_2)$ bestimmt ($x_1 : x_2$ komplexe Zahl!), die wir als Normalkoordinaten voraussetzen. Für sie gilt also die zu (4) entsprechende Relation

$$(x\overline{x}) \equiv x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 = 1. \tag{4'}$$

Wir betrachten einen vierdimensionalen euklidischen Raum E_4, dessen rechtwinkelige cartesische Koordinaten bestimmt sind durch

$$\left\{\begin{array}{ll} X_1 = \sqrt{2}\, x_1\overline{x}_1, & X_2 = \sqrt{2}\, x_2\overline{x}_2, \\ X_3 = x_1\overline{x}_2 + x_2\overline{x}_1, & X_4 = \dfrac{1}{i}(x_1\overline{x}_2 - x_2\overline{x}_1). \end{array}\right. \tag{10}$$

Die Punkte unsrer Geraden werden auf die Oberfläche der (dreidimensionalen) Einheitskugel abgebildet. Dies sieht man so ein. Aus (10) folgt

$$X_3^2 + X_4^2 = 2\, X_1 X_2. \tag{11}$$

[8]) Vgl. dazu § 10 und § 11 der unter [5]) zitierten Abhandlung, ferner in dem unter [7]) zitierten Buch das Kapitel 5, insbes. Nr. 273. Die Abbildung, die hier verwendet wird, findet sich außerdem in der Abhandlung: W. Wirtinger, Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in euklidischer und Hermitescher Maßbestimmung, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **44** (1936), S. 343—365.

Außerdem gilt wegen (4')

(12) $$X_1 + X_2 = \sqrt{2};$$

(11) und (12) zusammen ergeben

(13) $$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 2.$$

Die Punkte unsrer komplexen projektiven Geraden liegen also wegen (12) auf einer Hyperebene und wegen (13) auch auf der Oberfläche einer Hyperkugel, gehören also dem Schnitt beider an, der, wie behauptet, die Oberfläche der gewöhnlichen Einheitskugel ist.

Machen wir die komplexe projektive Gerade zu einer elliptisch-Hermiteschen, indem wir (jetzt für den Fall $n = 2$) die durch (5) erklärte Metrik einführen. Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß durch die Abbildung (10) die Metrik auf der Geraden in die Metrik der Kugeloberfläche übergeht[9]). Sind also (x_1, x_2) und (y_1, y_2) zwei Punkte unsrer Geraden, die den Abstand d haben, und (X_1, X_2, X_3, X_4), (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) ihre Bildpunkte auf der Einheitskugel, so gilt für die sphärische Distanz φ derselben

(14) $$\varphi = d.$$

Wir wollen noch den Ausdruck finden, in den das Flächenelement der Einheitskugel durch (10) übergeht. Sind $\mathfrak{E}_1(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})$ und $\mathfrak{E}_2(E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24})$ zwei orthogonale Einheitsvektoren auf der Kugel und $\mathfrak{X}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ der Ortsvektor eines Punktes derselben, dann ist das Flächenelement $d\Omega$ durch die Differentialform

(15) $$d\Omega = (\mathfrak{E}_1 d\mathfrak{X})(\mathfrak{E}_2 d\mathfrak{X})$$

bestimmt. Die beiden Pfaffschen Formen, die auf der rechten Seite von (15) auftreten, sind alternierend zu multiplizieren. Daß (15) wirklich das Flächenelement liefert, geht daraus hervor, daß dieser Ausdruck gleich dem skalaren Produkt der beiden Bivektoren ist, die beziehungsweise die Komponenten

(16) $$\begin{aligned}&(E_{11}E_{22} - E_{21}E_{12}),\ (E_{11}E_{23} - E_{21}E_{13}),\ (E_{11}E_{24} - E_{21}E_{14}),\\ &(E_{12}E_{23} - E_{22}E_{13}),\ (E_{12}E_{24} - E_{22}E_{14}),\ (E_{13}E_{24} - E_{23}E_{14})\end{aligned}$$

und

$$dX_1 dX_2,\ dX_1 dX_3,\ dX_1 dX_4,\ dX_2 dX_3,\ dX_2 dX_4,\ dX_3 dX_4$$

---

[9]) Siehe dazu die unter [8]) zitierte Abhandlung Wirtingers, insbes. Nr. 4.

haben[10]). Ergänzen wir noch $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ durch die Vektoren $\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}, \frac{X_2}{\sqrt{2}}, \frac{X_3}{\sqrt{2}}, \frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{X_1}{\sqrt{2}}-1, \frac{X_2}{\sqrt{2}}-1, \frac{X_3}{\sqrt{2}}, \frac{X_4}{\sqrt{2}}\right)$ zu einem normierten orthogonalen 4-Bein. Aus der Orthogonalität der Matrix

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{2}} & \frac{X_2}{\sqrt{2}} & \frac{X_3}{\sqrt{2}} & \frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{X_2}{\sqrt{2}}-1 & \frac{X_3}{\sqrt{2}} & \frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} \end{vmatrix}$$

folgt

$$(18)\qquad \begin{aligned} E_{11}E_{22}-E_{21}E_{12} &= 0 \\ E_{11}E_{23}-E_{21}E_{13} &= -\frac{X_4}{\sqrt{2}} \\ E_{11}E_{24}-E_{21}E_{14} &= \frac{X_3}{\sqrt{2}} \\ E_{13}E_{24}-E_{23}E_{14} &= \frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ zur Hyperebene (12) orthogonal sind, gilt weiters

$$(19)\qquad E_{11}=-E_{12} \quad \text{und} \quad E_{21}=-E_{22}.$$

Wegen der Relationen (12) und (13) gilt ferner

$$(20)\qquad dX_1=-dX_2 \quad \text{und} \quad dX_1=\frac{X_3dX_3+X_4dX_4}{X_2-X_1}.$$

Aus (10), (18), (19), (20) folgt für das durch (15) festgelegte $d\Omega$

$$(21)\qquad d\Omega=2(dx_1 d\bar{x}_1+dx_2 d\bar{x}_2).$$

Die Bedeutung der auf der rechten Seite von (21) stehenden Differentialform wird sich im folgenden § 2 herausstellen.

§ 2.

Maße und Dichten in der ebenen elliptisch-Hermiteschen Geometrie.

Punkt und Gerade hängen in unsrer elliptisch-Hermiteschen Ebene von vier reellen Parametern ab, die also ihre Koordinaten sind. Nehmen diese vier Parameter sämtliche Werte aus einem

[10]) Vgl. dazu etwa E. CARTAN, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928), S. 5—10.

gewissen Bereich B des vierdimensionalen Zahlenraumes an, so erhalten wir eine gewisse Punkt- bezw. Geradenmenge. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, für eine solche Menge von Punkten bezw. Geraden ein *Maß* zu finden. Darunter ist folgendes gemeint: es soll, wenn u_1, u_2, u_3, u_4 die Parameter sind, von denen unsere Punkte (Geraden) abhängen und die im Zahlenraum in einem Bereich B variieren, ein vierfaches Integral

$$\int_B f(u_1, u_2, u_3, u_4)\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4 \tag{22}$$

gefunden werden, das bei beliebiger Wahl von B folgende Eigenschaften besitzt.

1. $f(u_1, u_2, u_3, u_4) > 0$.
2. Parameterinvarianz: das Integral bleibt ungeändert bei Ersetzung der u_i durch beliebige v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.
3. Invarianz gegenüber den elliptisch-Hermiteschen Bewegungen.

Als Dichte ist die vierfache Differentialform

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4)\, du_1\, du_2\, du_3\, du_4 \tag{23}$$

zu verstehen. Sie besitzt dieselben Invarianzeigenschaften wie (22).

Da die Bewegungen unsrer Geometrie die Punkte (Geraden) transitiv vertauschen, ist das Maß (22) und entsprechend die Dichte (23) bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Beginnen wir mit der Ermittlung der Punktdichte. Zu dem Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ wählen wir in seiner Polaren (in bezug auf (1)) zwei weitere e. H. orthogonale Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, die so wie $\mathfrak{x}$ Funktionen der $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$ sind. Für dieselben gilt

$$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{b}}_i) = (\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{b}_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{24}$$

Wir bilden nun, aus den Pfaffschen Formen $(d\mathfrak{x} \,.\, \bar{\mathfrak{b}}_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ und den zu ihnen konjugierten, durch alternierende Multiplikation die vierfache Differentialform

$$dP = 4\,(d\bar{\mathfrak{x}} \,.\, \mathfrak{b}_1)(d\mathfrak{x} \,.\, \bar{\mathfrak{b}}_1)(d\bar{\mathfrak{x}} \,.\, \mathfrak{b}_2)(d\mathfrak{x} \,.\, \bar{\mathfrak{b}}_2). \tag{25}$$

Der auf der rechten Seite von (25) stehende Ausdruck hat einen negativen Wert, wir wollen aber festsetzen, ihn, immer dem Absolutbetrag nach, zu nehmen, ohne dies durch eine besondere Bezeichnung anzudeuten.

Wir behaupten nun, daß (25) die gesuchte Punktdichte ist. Um dies einzusehen, haben wir erstens zu zeigen, daß unser

Ausdruck die Eigenschaften 1—3 besitzt und weiters, daß er *a)* unabhängig ist von dem willkürlichen Faktor $e^{i\varrho}$, mit dem wir sämtliche Koordinaten eines Punktes multiplizieren dürfen, *b)* unabhängig ist von der Wahl der zueinander e. H. orthogonalen Punkte $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$.

Die Eigenschaft 1 ist zufolge unserer Voraussetzungen über (25) trivialerweise erfüllt. 2 folgt daraus, daß wir es mit dem alternierenden Produkt Pfaffscher Formen zu tun haben. Eine elementare Rechnung zeigt, daß ein Skalarprodukt der Form $(\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{q}})$ invariant ist gegenüber elliptisch-Hermiteschen Bewegungen; daraus folgt aber, daß (25) die Eigenschaft 3 erfüllt. Aus der Gleichung

$$(26)\quad (\overline{d(\mathfrak{x}e^{i\alpha})(\mathfrak{b}_k e^{i\beta})})\,(d(\mathfrak{x}e^{i\alpha})\,(\overline{\mathfrak{b}_k e^{i\beta}})) = (\overline{d\mathfrak{x}}.\mathfrak{b}_k)\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_k) \qquad (k=1,2)$$

folgt das Erfülltsein von *a)*, es bleibt noch *b)* nachzuweisen. Mit $\mathfrak{b}_1^*$ und $\mathfrak{b}_2^*$ seien zwei beliebige e. H. orthogonale Punkte auf der Polaren von $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Sie gehen durch eine unitäre orthogonale Transformation aus $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ hervor. Dieselbe sei

$$(27)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}_1^* &= a_{11}\mathfrak{b}_1 + a_{12}\mathfrak{b}_2 \\ \mathfrak{b}_2^* &= a_{21}\mathfrak{b}_1 + a_{22}\mathfrak{b}_2. \end{aligned}$$

Aus

$$(28)\qquad (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}_i^*}) = (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_i)\,\overline{a_{i1}} + (d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}_i)\,\overline{a_{i2}} \qquad (i=1,2)$$

folgt wegen (2)

$$(29)\quad 4(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}_1^*})\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}_1^*})\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}_2^*})\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}_2^*}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} \end{vmatrix} dP = dP,$$

womit *b)* nachgewiesen ist.

Wegen der Dualität von Punkt und Gerade ist (25) zugleich die Geradendichte der Polaren von $\mathfrak{x}$. Ist also G eine beliebige Gerade, die durch die beiden e. H. orthogonalen Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ aufgespannt wird und ist $\mathfrak{b}$ der Pol von G, dann ist hiernach die Geradendichte

$$(30)\qquad dG = 4(d\mathfrak{a}_1\overline{\mathfrak{b}})\,(\overline{d\mathfrak{a}_1}\mathfrak{b})\,(d\mathfrak{a}_2\overline{\mathfrak{b}})\,(\overline{d\mathfrak{a}_2}\mathfrak{b}).$$

Außer der Punkt- und Geradendichte betrachten wir noch relative Dichten, nämlich die Dichte eines Punktes auf einer Geraden, und die zu ihr duale Dichte einer Gerade um einen Punkt.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gerade in unsrer Ebene, $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt derselben und $\mathfrak{b}$ der zu ihm e. H. orthogonale Punkt. Sind $\mathfrak{g}_1$

und $\mathfrak{g}_2$ die beiden Grundpunkte auf $\mathfrak{G}$, dann ist, wenn ξ_1 und ξ_2 die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{G}$ und β_1, β_2 die entsprechenden von $\mathfrak{b}$ sind,

$$(31) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi_1 \mathfrak{g}_1 + \xi_2 \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{b} &= \beta_1 \mathfrak{g}_1 + \beta_2 \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

Wir bilden aus den Pfaffschen Formen $(\overline{d\mathfrak{x}}.\mathfrak{b}) = (\overline{d\xi}.\beta)$ und $(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}) = (d\xi.\overline{\beta})$ durch alternierende Multiplikation die zweifache Differentialform

$$(32) \qquad dP(G) = 2\,(\overline{d\mathfrak{x}}.\mathfrak{b})\,(d\mathfrak{x}.\overline{\mathfrak{b}}) = 2\,(\overline{d\xi}.\beta)\,(d\xi.\overline{\beta}),$$

die ebenfalls dem Absolutbetrage nach genommen werden soll. Der Ausdruck (32) besitzt offensichtlich die Invarianzeigenschaften 1—3 und ist daher die gesuchte Dichte eines Punktes auf einer Geraden; (32) ist zugleich (wie aus der Dualität folgt) die Dichte der Polare von $\mathfrak{x}$ um den Pol von $\mathfrak{G}$.

Wir formen (32) noch auf eine Gestalt um, die später benützt wird. Aus $(\xi\overline{\beta}) = 0$ folgt

$$(33) \qquad \overline{\beta}_1 = -\xi_2, \quad \overline{\beta}_2 = \xi_1$$

und daher für $dP(G)$

$$(34) \qquad \frac{1}{2}\,dP(G) = \overline{d\xi_1}\,d\xi_1\,\xi_2\overline{\xi}_2 - \overline{d\xi_2}\,d\xi_1\,\overline{\xi}_1\xi_2 - \overline{d\xi_1}\,d\xi_2\,\overline{\xi}_2\xi_1 + \overline{d\xi_2}\,d\xi_2\,\xi_1\overline{\xi}_1.$$

Beachtet man die durch totale Ableitung aus $(\xi\overline{\xi}) = 1$ folgende Relation

$$(35) \qquad \overline{\xi}_1\,d\xi_1 + \overline{\xi}_2\,d\xi_2 + \xi_1\,\overline{d\xi_1} + \xi_2\,\overline{d\xi_2} = 0,$$

so erhält man schließlich

$$(36) \qquad dP(G) = 2\,(d\xi_1\,\overline{d\xi_1} + d\xi_2\,\overline{d\xi_2}).$$

Mit Rücksicht auf (21) ist also die relative Punktdichte gleich dem Flächenelement der Einheitskugel, auf die man $\mathfrak{G}$ vermöge (10) abbilden kann:

$$(37) \qquad dP(G) = d\Omega.$$

B e m e r k u n g. Zufolge der oben bemerkten Eindeutigkeit der Dichten, muß die Punktdichte (22), abgesehen von einem konstanten Faktor, mit dem schon von STUDY betrachteten (vierdimensionalen) Flächenelement der elliptisch-Hermiteschen Ebene übereinstimmen[11]). Eine einfache Rechnung, die hier unterdrückt werden soll, zeigt, daß dieser Faktor gleich Eins ist.

Schließlich sei noch erwähnt, daß eine Umformung von (22) den Ausdruck

$$dP = 4\,(dx_2\,d\overline{x}_2\,dx_3\,d\overline{x}_3 + dx_1\,d\overline{x}_1\,dx_3\,d\overline{x}_3 + dx_1\,d\overline{x}_1\,dx_2\,d\overline{x}_2) \tag{38}$$ [12])

liefert. Da derselbe im folgenden nicht benützt wird, wollen wir die entsprechende Rechnung nicht wiedergeben.

§ 3.

Das Bogenelement und die Differentialinvariante $d\omega_2$, die zu einer analytischen Kurve in der elliptisch-Hermiteschen Ebene gehören.

In der elliptisch-Hermiteschen Ebene ist eine analytische Kurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2) \tag{39}$$

dadurch gekennzeichnet, daß die Koordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$ stetig differenzierbare Funktionen der beiden reellen Parameter u_1, u_2 sind, für die die Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{Vmatrix} \tag{39a}$$

vom Range zwei ist. Wir greifen auf der Kurve $\mathfrak{C}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ heraus und bestimmen in demselben die Tangente, die wegen der Analytizität in jedem Punkt existiert. Dazu verbinden wir $\mathfrak{x}$ mit seinem benachbarten Punkte, den wir erhalten, wenn wir zu $\mathfrak{x}$ die Zuwächse $d\mathfrak{x}$ hinzufügen. Auf der Tangente wählen wir den zu $\mathfrak{x}$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{c}$. Zwischen $\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{c}$ besteht eine lineare Relation und es gilt daher

$$d\mathfrak{x} = k_1\mathfrak{c} + k_2\mathfrak{x}. \tag{40}$$

---

[11]) Siehe den § 5 der unten [5]) zitierten Abhandlung Studys, wo der in Frage stehende Differentialausdruck mit $d\omega_4$ bezeichnet ist.

[12]) In Nr. 214 des unter [7]) zitierten Buches findet sich die Differentialform (38), mit demjenigen Normierungsunterschied, daß dort der Faktor 4 fehlt. Wir haben uns hier der Normierung Studys angeschlossen.

Aus (40) folgt wegen der e. H. Orthogonalität von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{c}$

$$(41) \qquad (d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}}) = k_1, \quad (d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}}) = k_2.$$

(40) und (41) ergeben

$$(42) \qquad \mathfrak{c} = \frac{1}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})} d\mathfrak{x} - \frac{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}})}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})} \mathfrak{x},$$

woraus

$$(43) \qquad (d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c}) = \frac{(d\bar{\mathfrak{x}}.d\mathfrak{x}) - (d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{x}})(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{x})}{(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})}.$$

Ein Vergleich von (43) mit (7) ergibt den gesuchten Ausdruck für das Bogenelement ds, das zu unsrer Kurve $\mathfrak{C}$ gehört, nämlich

$$(44) \qquad \boxed{\frac{ds^2}{4} = (d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c})(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}}).}$$

Es soll noch besonders darauf hingewiesen werden, daß auf der rechten Seite von (44) das gewöhnliche Produkt der beiden zu einander konjugierten Pfaffschen Formen steht.

Wir wollen nun den Zusammenhang herstellen, der zwischen (44) und demjenigen Ausdruck besteht, den man erhält, wenn das alternierende Produkt $[(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{c})(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})]$ gebildet und wie bisher der Absolutbetrag genommen wird.

Wir setzen

$$(45) \qquad (d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}}) = d\omega = a_1\,du_1 + a_2\,du_2$$

und bilden das alternierende Produkt von $d\omega$ mit seiner konjugierten Form:

$$(46) \qquad [d\omega\, d\bar{\omega}] = |a_1\bar{a}_2 - a_2\bar{a}_1|\, du_1\, du_2.$$

Die mit dem Faktor 4 multiplizierte quadratische Form (44) ist

$$(47) \quad 4\,d\omega\,.\,d\bar{\omega} = 4\,(a_1\bar{a}_1\,du_1^2 + (a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_1)\,du_1\,du_2 + a_2\bar{a}_2\,du_2^2)$$

und ihre Diskriminante g hat daher die Gestalt

$$(48) \qquad g = -4\,(a_1\bar{a}_2 - a_2\bar{a}_1)^2.$$

Da auf der rechten Seite von (48) eine rein imaginäre Zahl zum Quadrat erhoben wird, ist $g > 0$. Ein Vergleich von (46) und (48) zeigt, daß

$$(49) \qquad 2[d\omega\, d\bar{\omega}] = \sqrt{g}\,du_1\,du_2 = d\omega_1 = 2[(d\mathfrak{x}.\bar{\mathfrak{c}})(d\bar{\mathfrak{x}}.\mathfrak{x})].$$

Die Relation (49) soll nun geometrisch gedeutet werden. Die elliptisch-Hermitesche Ebene, mit dem durch die quadratische

Form (7) erklärten Bogenelement, ist, reell gedeutet, ein vierdimensionaler Riemannscher Raum, die Kurve $\mathfrak{C}$ ist in demselben eine zweidimensionale Fläche; (49) besagt nun, daß $d\omega_2$ das Flächenelement dieser Fläche ist. Im Falle, daß unsere Kurve $\mathfrak{C}$ eine Strecke ist, wird wegen (32) und (44)

$$d\omega_2 = dP(G). \tag{50}$$

Wegen (36) ist mit (50) gleichbedeutend

$$\sqrt{g}\, du_1 du_2 = 2\,|d\xi_1 d\bar{\xi}_1 + d\xi_2 d\bar{\xi}_2|. \tag{51}$$

(51) ist in einem allgemeinern Satz von W. WIRTINGER enthalten[18]). [Es wird dort gezeigt, daß eine Relation der Art (8) immer dann besteht, wenn die im vierdimensionalen Raum betrachtete Fläche synektisch ist (in der zitierten Abhandlung wird für synektische Mannigfaltigkeiten die Bezeichnung *Gebilde* verwendet), ist hingegen die Fläche nicht synektisch, so ist die linke Seite von (51) immer größer als die rechte.]

§ 4.

Das Gerademaß einer Kurve.

Zu Grunde gelegt sei wieder die schon im vorangehenden § 3 betrachtete Kurve $\mathfrak{C}$. Über dieselbe machen wir jetzt noch folgende einschränkende Voraussetzung. Es möge die Kurve $\mathfrak{C}$ mit einer beliebigen Geraden nur eine endliche Anzahl von Schnittpunkten haben. Diese Voraussetzung wird im folgenden wesentlich sein.

Wir wollen nun die Anzahl aller Treffgeraden von $\mathfrak{C}$ bestimmen, jede aber in der Vielfachheit genommen, in der sie $\mathfrak{C}$ trifft. Analytisch bedeutet dies die Berechnung des Integrals

$$\int\limits_{\mathfrak{G}} k\,dG, \tag{52}$$

wobei dG die Bedeutung von (30) hat und das Integral über alle Treffgeraden von $\mathfrak{C}$ zu erstrecken ist und k die jeweilige Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ ist. Bevor wir dieses Integral berecnnen, nehmen wir eine zweckmäßige Umformung von dG vor.

---

18) Vgl. in der unter 8) zitierten Abhandlung Wirtingers, insbes. S. 353, Formel (48),

Wir betrachten eine beliebige Treffgerade $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}_1$ sei einer der Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$. Auf $\mathfrak{G}$ wählen wir weiters den zu $\mathfrak{a}_1$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{a}_2$ und bezeichnen den Pol von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{b}$. Es gilt also

$$(53) \qquad (\mathfrak{a}_1\bar{\mathfrak{a}}_2) = (\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}_1) = (\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}_2) = 0.$$

Auf der Tangente $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{a}_1$ wählen wir ferner den zu $\mathfrak{a}_1$ e. H. orthogonalen Punkt $\mathfrak{c}$. Aus (40) und (41), die hier mit $\mathfrak{a}_1$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ gelten, folgt

$$(54) \qquad (d\bar{\mathfrak{a}}_1 . \mathfrak{b}) = (d\bar{\mathfrak{a}} . \mathfrak{c})(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}}).$$

Wegen (50) ist daher

$$(55) \qquad dG = d\omega_2 . 2(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c})(d\bar{\mathfrak{a}}_2 . \mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2 . \bar{\mathfrak{b}})$$

Ist $\mathfrak{d}$ der Pol der Tangente $\mathfrak{T}$, dann gilt für den Winkel φ zwischen Tangente $\mathfrak{T}$ und Gerade $\mathfrak{G}$, wegen (9)

$$(56) \qquad |(\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{b}})| = \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Da wir Normalkoordinaten verwenden, gilt auch für $\mathfrak{b}$ die Relation (4), aus der wir unter Beachtung der Beziehung

$$(27) \qquad \mathfrak{b} = p_1\mathfrak{c} + p_2\mathfrak{d}$$

(die daraus folgt, daß $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auf einer Geraden liegen), sofort schließen

$$(58) \qquad |(\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}})|^2 = (\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{d}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{d}) = 1 - (\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}).$$

(56) und (58) zusammen ergeben

$$(59) \qquad (\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{c}})(\bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}) = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Wir finden demnach für (55) schließlich

$$(60) \qquad dG = 2d\omega_2 \sin^2\frac{\varphi}{2}(d\bar{\mathfrak{a}}_2 . \mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2 . \bar{\mathfrak{b}}).$$

Bei der Berechnung des Integrals (52) gehen wir nun so vor: zunächst halten wir den Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{C}$ fest und drehen $\mathfrak{G}$ so lange, bis es mit seiner Ausgangslage zusammenfällt. Als Ausgangslage dürfen wir diejenige wählen, in der $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{G}$ zusammenfällt. (Wir integrieren also zunächst nur nach $2\sin^2\frac{\varphi}{2}(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2.\bar{\mathfrak{b}})$). Da bei dieser Drehung φ schließlich zu einem gestreckten Winkel wird, so variiert φ nach einer Bemerkung, die wir im ersten Paragraphen im Anschluß an Formeln (5) und (9) gemacht haben, von 0 bis 2π. $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}$ werden bei dieser Drehung die ganze Polare von $\mathfrak{a}_1$ durchlaufen. Dieselbe kann zufolge (10) auf die Einheitskugel abgebildet werden, wobei $2(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}.\bar{\mathfrak{b}})$ wegen (37) das Flächenelement derselben ist, das also bei der obigen Bewegung die Gesamtoberfläche derselben überstreicht. Der feste Punkt $\mathfrak{b}$ (Pol von $\mathfrak{T}$) bildet sich auf einem Punkt der Kugel ab und der Winkel φ ist dann der Abstand dieses Punktes von der jeweiligen Lage des Flächenelementes[14]). Wir können wegen der Rotationssymetrie der Kugel diesen festen Punkt in den Nordpol derselben verlegen. Bezeichnen wir das Flächenelement der Einheitskugel mit $d\Omega$, dann ist

$$(61)\qquad 2\int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2.\bar{\mathfrak{b}}) = \int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\Omega.$$

Zur Berechnung von (61) führen wir Polarkoordinaten ein; in denselben ist

$$(62)\qquad d\Omega = |\sin\varphi|\,d\varphi\,d\vartheta,$$

wenn φ der Polabstand und ϑ die geographische Breite bedeuten. Man hat demnach

$$(63)\qquad 2\int \sin^2\frac{\varphi}{2}\,(d\bar{\mathfrak{a}}_2.\mathfrak{b})(d\mathfrak{a}_2.\bar{\mathfrak{b}}) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2}|\sin\varphi|\,d\varphi\,d\vartheta = 2\pi.$$

Läßt man nun den Punkt $\mathfrak{a}_1$ die Kurve $\mathfrak{C}$ durchlaufen, so hat man, wenn noch

$$(64)\qquad \int\limits_{\mathfrak{C}} d\omega_2 = L$$

gesetzt wird,

$$(65)\qquad \boxed{\int\limits_{\mathfrak{C}} k\,dG = 2\pi L.}$$

Wir wollen noch denjenigen Spezialfall betrachten, in dem $\mathfrak{G}$ eine Strecke ist. Die Trägergerade dieser Strecke hat vermöge (10) die Einheitskugel als Bild und nach (21) und (51) ist L ein Stück der Oberfläche derselben. Lassen wir die Strecke in die

14) Vgl. dazu denjenigen Teil von § 1, der über die Abbildung der Gerade auf die Einheitskugel handelt.

ganze Gerade (von endlicher Länge) übergehen, so gibt uns (64) das Gesamtmaß der elliptisch-Hermiteschen Ebene, an Geraden. Wegen der Dualität ist dasselbe auch gleich dem gesamten (Punkt-) Inhalt der elliptisch-Hermiteschen Ebene. In der Tat ist ja

$$L = 4\pi \tag{66}$$

als Oberfläche der Einheitskugel und demnach

$$\int dP = \int dG = 8\pi^2 \tag{67}$$

wie bereits von STUDY gefunden.

(Eingegangen am 27. Oktober 1938.)